

Matematică

clasa a V-a

II

art
educațional

Prezentul auxiliar a fost avizat de Ministerul Educației Naționale prin Ordinul nr. 3022 din 08.01.2018 și se regăsește la poziția nr. 287 din anexa Ordinului.

Lucrarea a fost realizată în conformitate cu noua *Programă școlară pentru disciplina MATEMATICĂ. CLASELE A V-A – A VIII-A*, aprobată prin O.M. nr. 3393/28.02.2017.

Referenți științifici: prof. drd. Livia Harabagiu
prof. gr. I. Dorin Irinel Popa
prof. gr. I. Nicolae Bivol

Redactor: Irina Munteanu
Tehnoredactare: Cornel Drăghia
Coperta: Alexandru Daș

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
PERIANU, MARIUS

Matematică pentru clasa a V-a / Marius Perianu, Cătălin Stănică, Ștefan Smărăndoiu. - București : Art Educațional, 2018

2 vol.
ISBN 978-606-8948-43-0
Semestrul 2. - 2018. - ISBN 978-606-8948-42-3

I. Stănică, Cătălin
II. Smărăndoiu, Ștefan

51

Tiparul executat la:



office@tipografiaeurobusiness.ro
www.tipografiaeurobusiness.ro

Pentru comenzi vă puteți adresa
Departamentului Difuzare
C.P. 22, O.P. 84, cod 062650, sector 6, București
telefon:
021.224.17.65
0721.213.576
0744.300.870

Toate drepturile asupra acestei lucrări sunt rezervate Editurii Art Educațional.
Nicio parte a acestei lucrări nu poate fi reprodușă, stocată ori transmisă,
sub nicio formă (electronic, mecanic, fotocopiare, înregistrare sau altfel),
fără acordul prealabil scris al Editurii Art Educațional.

© Art Educațional, un imprint al Art Klett SRL, 2018

CUPRINS

Unitatea 1. Frații ordinare

1.1. Frații ordinare. Noțiuni introductive.....	7
1.2. Clasificarea fracțiilor ordinare.....	11
1.3. Frații echivalente.....	16
1.4. Amplificarea și simplificarea fracțiilor. Frații ireductibile.....	19
Teste de evaluare	25
Fișă pentru portofoliul individual (A1)	27
1.5. Reprezentarea fracțiilor ordinare pe axa numerelor.....	29
1.6. Compararea și ordonarea fracțiilor ordinare.....	32
1.7. Adunarea fracțiilor ordinare.....	35
1.8. Scăderea fracțiilor ordinare.....	39
Teste de evaluare	43
Fișă pentru portofoliul individual (A2)	45
1.9. Înmulțirea fracțiilor ordinare.....	47
1.10. Împărțirea fracțiilor ordinare.....	50
1.11. Ridicarea la putere a unei fracții ordinare. Reguli de calcul cu puteri.....	52
Teste de evaluare	55
Fișă pentru portofoliul individual (A3)	57
1.12. Frații/procente dintr-un număr natural sau dintr-o fracție ordinară.....	59
Teste de evaluare	63
Fișă pentru portofoliul individual (A4)	65
Test – model pentru Evaluarea Națională	67

Unitatea 2. Frații zecimale

2.1. Scrierea fracțiilor ordinare cu numitori puteri ale lui 10 sub formă zecimală. Transformarea unei fracții zecimale, cu un număr finit de zecimale nenule, într-o fracție ordinară.....	71
2.2. Compararea, ordonarea și reprezentarea pe axa numerelor a fracțiilor zecimale. Aproximări.....	75
2.3. Adunarea și scăderea fracțiilor zecimale care au un număr finit de zecimale nenule.....	79
Teste de evaluare	85
Fișă pentru portofoliul individual (A5)	87
2.4. Înmulțirea fracțiilor zecimale care au un număr finit de zecimale nenule.....	89
2.5. Ridicarea la putere cu exponent natural a unei fracții zecimale care are un număr finit de zecimale nenule.....	93
Teste de evaluare	96
Fișă pentru portofoliul individual (A6)	97

2.6. Împărțirea numerelor naturale cu rezultat fracție zecimală. Periodicitate.....	99
2.7. Împărțirea a două fracții zecimale.....	104
2.8. Ordinea efectuării operațiilor. Aproximări.....	108
Teste de evaluare	112
Fișă pentru portofoliul individual (A7)	113
2.9. Media aritmetică a două sau mai multe fracții zecimale finite.....	115
2.10. Metode aritmetice pentru rezolvarea problemelor cu fracții în care intervin și unități de măsură.....	118
Teste de evaluare	120
Fișă pentru portofoliul individual (A8)	121
Test – model pentru Evaluarea Națională	123
2.11. Probleme cu caracter aplicativ.....	125
2.12. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade.....	128

Unitatea 3. Elemente de geometrie

3.1. Punctul. Dreapta. Planul.....	133
3.2. Semidreapta. Semiplanul.....	138
3.3. Segmentul de dreaptă.....	143
3.4. Pozițiile relative a două drepte.....	145
3.5. Lungimea unui segment.....	148
Teste de evaluare	153
Fișă pentru portofoliul individual (G1)	155
Test – model pentru Evaluarea Națională	157
3.6. Unghiul.....	159
3.7. Clasificarea unghiurilor.....	164
3.8. Probleme cu caracter aplicativ.....	167
3.9. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade.....	169

Unitatea 4. Unități de măsură

4.1. Unități de măsură pentru lungime. Perimetre. Transformări.....	173
4.2. Unități de măsură pentru arie. Aria pătratului și a dreptunghiului. Transformări.....	176
4.3. Unități de măsură pentru volum. Volumul cubului și al paralelipipedului dreptunghic. Transformări.....	180
Teste de evaluare	183
Fișă pentru portofoliul individual (G2)	185
Test – model pentru Evaluarea Națională	187
4.4 Probleme cu caracter aplicativ.....	189
4.5 Probleme pentru performanță școlară și olimpiade.....	192

Unitatea 5. Subiecte pentru evaluările finale

5.1. Variante de subiecte pentru teză.....	197
5.2. Variante de subiecte pentru evaluarea finală.....	202
Teste – model pentru Evaluarea Națională	206

Soluții	212
----------------------	-----

FRACȚII ORDINARE

- Tema 1.1.** Frații ordinare. Noțiuni introductive
- Tema 1.2.** Clasificarea fracțiilor ordinare
- Tema 1.3.** Frații echivalente
- Tema 1.4.** Amplificarea și simplificarea fracțiilor. Frații ireductibile
 Teste de evaluare
 Fișă pentru portofoliul individual (A1)
- Tema 1.5.** Reprezentarea fracțiilor ordinare pe axa numerelor
- Tema 1.6.** Compararea și ordonarea fracțiilor ordinare
- Tema 1.7.** Adunarea fracțiilor ordinare
- Tema 1.8.** Scăderea fracțiilor ordinare
 Teste de evaluare
 Fișă pentru portofoliul individual (A2)
- Tema 1.9.** Înmulțirea fracțiilor ordinare
- Tema 1.10.** Împărțirea fracțiilor ordinare
- Tema 1.11.** Ridicarea la putere a unei fracții ordinare. Reguli de calcul cu puteri
 Teste de evaluare
 Fișă pentru portofoliul individual (A3)
 Test – model pentru Evaluarea Națională
- Tema 1.12.** Frații/procente dintr-un număr natural sau dintr-o fracție ordinară
 Teste de evaluare
 Fișă pentru portofoliul individual (A4)
 Test – model pentru Evaluarea Națională

Competențe generale și specifice vizate

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

1.2. Identificarea fracțiilor ordinare sau zecimale în contexte variate

2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

2.2. Efectuarea de calcule cu fracții folosind proprietăți ale operațiilor aritmetice

3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

3.2. Utilizarea de algoritmi pentru efectuarea operațiilor cu fracții ordinare sau zecimale

4. Expimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

4.2. Utilizarea limbajului specific fracțiilor/procentelor în situații date

5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

5.2. Analizarea unor situații date în care intervin fracții pentru a estima sau pentru a verifica validitatea unor calcule

6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

6.2. Reprezentarea matematică, folosind fracțiile, a unei situații date, în context intradisciplinar și interdisciplinar (geografie, fizică, economie etc.)

Tema 1.1

Fracții ordinare. Noțiuni introductive

O parte dintr-un întreg, împărțit în părți egale, se numește *unitate fracționară*.

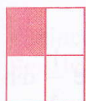
Exemple. Partea colorată din următoarele figuri reprezintă:



o doime sau o jumătate sau unu pe doi; se scrie $\frac{1}{2}$.



o treime sau unu pe trei; se scrie $\frac{1}{3}$.



o pătrime sau un sfert sau unu pe patru; se scrie $\frac{1}{4}$.

Una sau mai multe unități fracționare se numește *fracție*. Forma generală a fracției este $\frac{a}{b}$, unde a, b sunt numere naturale și $b \neq 0$.

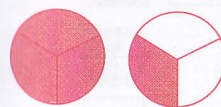
Numărul a se numește *numărător* și arată câte unități fracționare s-au luat; numărul b se numește *numitor* și arată în câte părți egale a fost împărțit întregul; linia orizontală (sau oblică) se numește *linie de fracție*.

Fracția este o pereche de numere naturale, a și b , scrisă sub forma $\frac{a}{b}$ sau a/b , $b \neq 0$.

Exemple. Partea colorată din următoarele figuri reprezintă:



$\frac{3}{4}$ citim *trei pătrimi* sau *trei supra patru* sau *trei pe patru*.



$\frac{2}{3}$ citim *patru treimi* sau *patru supra trei* sau *patru pe trei*.



1. Scrieți sub formă de fracție:

a) o pătrime;

d) o treime;

g) o miime;

b) o șesime;

e) o sutime;

h) o milionime;

c) o zecime;

f) trei optimi;

i) două cincimi.

2. Citiți următoarele fracții:

a) $\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{40}, \frac{1}{19}, \frac{1}{17}, \frac{1}{1000000}$;

b) $\frac{2}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{9}{9}, \frac{3}{4}, \frac{2}{6}, \frac{10}{8}, \frac{16}{15}, \frac{24}{23}, \frac{15}{10}, \frac{13}{8}, \frac{12}{7}$.

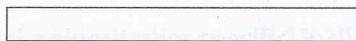
3. Reprezentați prin desene următoarele fracții: $\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}$.

4. Scrieți sub formă de fracție:

- a) trei noimi; d) opt zecimi; g) cinci cincimi;
b) cinci șesimi; e) patru cincimi; h) treizeci și șapte de sutimi;
c) șapte pătrimi; f) șase pătrimi; i) patru optimi.

Rezolvare. a) trei noimi se scrie $\frac{3}{9}$.

5. Reprezentați, în desene diferite, fracțiile $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{2}{8}, \frac{6}{8}, \frac{8}{8}$ din întregul următor:



6. Desenați un pătrat cu latura de 3 cm. Colorați cu roșu $\frac{2}{3}$ din el și cu verde $\frac{1}{3}$ din el.

7. Desenați un dreptunghi cu dimensiunile de 6 cm și 4 cm. Colorați din acest dreptunghi fracțiile $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{24}, \frac{3}{12}, \frac{1}{2}$.

8. Scrieți în tabelul de mai jos fracția reprezentată de partea hașurată din desen ca în exemplul de la d):

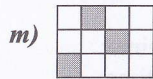
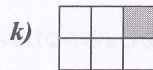
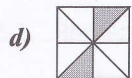
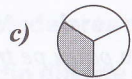
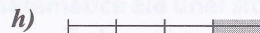
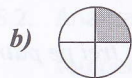
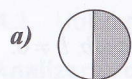


figura	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
fracția				$\frac{2}{8}$									



9. Citiți următoarele fracții: $\frac{1}{6}, \frac{3}{4}, \frac{9}{12}, \frac{8}{7}, \frac{30}{42}, \frac{9}{16}, \frac{48}{50}, \frac{103}{207}, \frac{83}{96}, \frac{a}{b}, \frac{2x}{5y}$.

10. Folosind câte două dintre numerele 3, 5, 7, scrieți toate fracțiile posibile.

11. Folosind câte două dintre numerele 6, 4, 10, scrieți toate fracțiile posibile.

12. Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale mai mici decât 6 și mai mari decât 3.

13. Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale prime distincte cuprinse între 10 și 20.

Rezolvare. Numerele prime cuprinse între 10 și 20 sunt: 11, 13, 17 și 19. Fracțiile care se pot scrie cu aceste numere sunt: $\frac{11}{13}, \frac{11}{17}, \frac{11}{19}, \frac{13}{11}, \frac{13}{17}, \frac{13}{19}, \frac{17}{11}, \frac{17}{13}, \frac{17}{19}, \frac{19}{11}, \frac{19}{13}, \frac{19}{17}$.

14. Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale prime diferite cuprinse între 20 și 40.

15. Scrieți în tabelul de mai jos fracția reprezentată de partea hașurată din desen, ca în exemplul h):

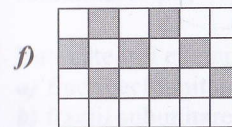
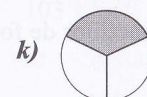
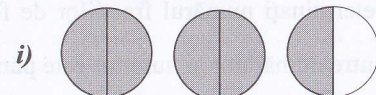
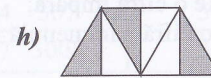
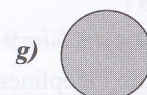
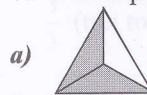


figura	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
fracția								$\frac{3}{6}$			

16. Scrieți toate fracțiile care îndeplinesc, simultan, condițiile:
- numărătorul este o cifră pară, nenulă;
 - numitorul este o cifră cu cel puțin 3 mai mare decât numărătorul.

17. Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, unde a este divizor al 12 și b este divizor al lui 35.

18. Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere prime cuprinse între 25 și 45, iar $a < b$.



19. Fie fracția $\frac{23}{2x+1}$. Determinați numărul natural x , pătrat perfect, pentru care fracția are numitorul mai mic decât numărătorul.

Rezolvare. Avem $2x + 1 < 23 \Leftrightarrow 2x < 23 - 1 \Leftrightarrow 2x < 22 \mid : 2 \Leftrightarrow x < 11$. Cum x este pătrat perfect și $x < 11$, rezultă că x poate fi 0, 1, 4, 9.

20. Fie fracția $\frac{3x+2}{98}$. Determinați numărul natural x , pătrat perfect, pentru care fracția are numitorul mai mare decât numărătorul.

21. Scrieți toate fracțiile $\frac{a}{b}$ unde a este pătratul unui număr natural, b este cubul unui număr natural și $0 < a < 37$, $0 < b < 38$.

22. Scrieți toate fracțiile care îndeplinesc, simultan, condițiile:
- numărătorul este o cifră impară;
 - numitorul este o cifră pară nenulă mai mare decât numărătorul cu cel mult 5.

23. Determinați numărul fracțiilor de forma $\frac{ab+5}{ba+6}$ care au proprietatea că suma dintre numărător și numitor este pătrat perfect.

Probleme de șapte stele

24. Determinați numărul perechilor de fracții $\left(\frac{a}{b}; \frac{c}{d}\right)$ astfel încât $a \cdot d = b \cdot c = 6$.

25. Determinați numărul fracțiilor de forma $\frac{1}{ab+bc+ca}$.

26. a) Determinați numărul fracțiilor de forma $\frac{128}{ab}$.

b) Dintre fracțiile găsite la punctul anterior, aflați-le pe cele care au proprietatea că numărătorul și numitorul au cel puțin un divizor comun mai mare sau egal cu 2.

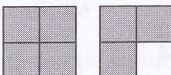
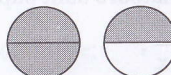
Tema 1.2

Clasificarea fracțiilor ordinare

Fie a și b două numere naturale, cu $b \neq 0$. Frația $\frac{a}{b}$ se numește:

- *echiunitară*, dacă $a = b$ (numărătorul este egal cu numitorul);
- *subunitară*, dacă $a < b$ (numărătorul este mai mic decât numitorul);
- *supraunitară*, dacă $a > b$ (numărătorul este mai mare decât numitorul).

Exemple.

Fracții echiunitare	Fracții subunitare	Fracții supraunitare
 $\frac{4}{4}$ (patru pătrimi)	 $\frac{1}{4}$ (o pătrime)	 $\frac{7}{4}$ (șapte pătrimi)
 $\frac{3}{3}$ (trei treimi)	 $\frac{3}{5}$ (trei cincimi)	 $\frac{3}{2}$ (trei doimi)
$\frac{8}{8}, \frac{11}{11}, \frac{23}{23}, \frac{100}{100}, \frac{205}{205}$	$\frac{7}{10}, \frac{1}{13}, \frac{4}{5}, \frac{4}{7}, \frac{307}{3008}$	$\frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{8}{6}, \frac{8}{7}, \frac{100}{25}$



1. Completați numărătorul sau numitorul lipsă, astfel încât să obțineți fracții

echiunitare: $\frac{6}{\square}, \frac{11}{\square}, \frac{\square}{13}, \frac{10}{\square}, \frac{13}{\square}, \frac{\square}{25}, \frac{\square}{103}$.

2. Dați câte trei exemple de:

- fracții echiunitare;
- fracții subunitare cu numărătorul 7;
- fracții subunitare cu numitorul 12;
- fracții supraunitare cu numitorul 10;
- fracții supraunitare cu numărătorul 20.

3. Scrieți fracțiile echiunitare, fracțiile subunitare și fracțiile supraunitare din șirul de fracții:

$$\frac{3}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{7}, \frac{8}{4}, \frac{3}{5}, \frac{11}{12}, \frac{9}{8}, \frac{9}{10}, \frac{14}{20}, \frac{31}{30}, \frac{90}{91}, \frac{103}{33}, \frac{405}{504}.$$

4. În următorul șir de fracții, subliniați-le pe cele supraunitare:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{5}{6}, \frac{17}{16}, \frac{23}{20}, \frac{41}{43}, \frac{70}{60}, \frac{51}{41}, \frac{83}{15}, \frac{99}{103}, \frac{86}{68}, \frac{15}{105}.$$

5. În următoarea secvență de fracții, subliniați cu o linie pe cele subunitare și cu două linii pe cele supraunitare:

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{4}{4}, \frac{3}{6}, \frac{6}{6}, \frac{7}{8}, \frac{11}{10}, \frac{9}{10}, \frac{23}{15}, \frac{54}{27}, \frac{18}{41}, \frac{43}{43}, \frac{72}{71}, \frac{86}{86}, \frac{97}{79}.$$

6. Aflați, în fiecare caz, numărul natural x pentru care fracțiile următoare sunt echiunitare:

$$\begin{array}{llll} a) \frac{x}{4}; & b) \frac{x+1}{7}; & c) \frac{x-2}{10}; & d) \frac{6}{2x}; \\ e) \frac{14}{x+2}; & f) \frac{23}{x-1}; & g) \frac{104}{20x+4}; & h) \frac{3x+2}{2x+3}. \end{array}$$

7. Determinați, în fiecare caz, valorile numărului natural x pentru care fracțiile următoare sunt supraunitare:

$$\begin{array}{llll} a) \frac{4}{x}; & b) \frac{x+1}{7}; & c) \frac{x-2}{10}; & d) \frac{6}{2x}. \end{array}$$

8. Aflați numărul natural x pentru care fracțiile următoare sunt subunitare:

$$\begin{array}{llll} a) \frac{x}{3}; & b) \frac{x+12}{17}; & c) \frac{11}{x-2}; & d) \frac{13}{4x}. \end{array}$$

9. Indicați patru numere naturale care, puse în locul lui x în fracția $\frac{x}{13}$, determină o fracție subunitară.

Rezolvare. Frația este subunitară dacă numărătorul este mai mic decât numitorul, adică $x < 13$. Prin urmare x poate fi unul dintre numerele 0, 1, 2, ..., 12. Putem lua oricare patru dintre aceste valori; spre exemplu pentru $x = 2, x = 5, x = 8$ și $x = 11$ se obțin fracțiile subunitare $\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, \frac{8}{13}$ și $\frac{11}{13}$.

10. Arătați că fracția $\frac{ab+bc+ca}{ac+cb+ba}$ este echiunitară.

11. Pentru câte numere naturale n fracția $\frac{8}{n+1}$ este supraunitară?

12. Se consideră fracțiile:

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{5}, \frac{3}{7}, \frac{8}{6}, \frac{7}{3}, \frac{6}{6}, \frac{9}{8}, \frac{8}{10}, \frac{8}{12}, \frac{9}{9}, \frac{11}{13}, \frac{14}{14}, \frac{15}{12}, \frac{23}{14}, \frac{39}{93}, \frac{74}{47}, \frac{103}{81}, \frac{205}{502}.$$

Selectați dintre acestea:

a) fracțiile subunitare; b) fracțiile echiunitare; c) fracțiile supraunitare.



13. Care dintre următoarele fracții sunt subunitare: $\frac{1}{7}, \frac{5}{3}, \frac{4}{4}, \frac{4}{6}, \frac{9}{8}, \frac{7}{8}, \frac{20}{3}, \frac{31}{15}$?

14. Care dintre următoarele fracții sunt supraunitare: $\frac{2}{5}, \frac{6}{3}, \frac{8}{7}, \frac{5}{5}, \frac{3}{12}, \frac{13}{10}, \frac{71}{59}, \frac{60}{90}$?

15. La câte dintre fracțiile $\frac{3}{3}, \frac{5}{4}, \frac{1}{6}, \frac{18}{13}, \frac{24}{53}, \frac{60}{60}, \frac{35}{104}, \frac{8}{8}, \frac{19}{14}$ trebuie să modificăm numărătorii pentru ca toate să devină, după modificare, fracții echiunitare?

16. Pentru câte numere naturale n fracția $\frac{n+3}{27}$ este subunitară?

17. Determinați numerele naturale n care verifică simultan condițiile:

$$a) \frac{n+1}{5} \text{ este fracție supraunitară; } b) \frac{n+7}{20} \text{ este fracție subunitară.}$$

Rezolvare. Frația $\frac{n+1}{5}$ este supraunitară dacă $n+1 > 5$, adică $n > 4$. Frația $\frac{n+7}{20}$ este subunitară dacă $n+7 < 20$, adică $n < 13$. Obținem $4 < n < 13$, deci n poate lua valorile 5, 6, 7, ..., 11, 12.

18. Determinați numerele naturale n care verifică simultan condițiile:

$$a) \frac{n+2}{15} \text{ este fracție subunitară; } b) \frac{n+1}{7} \text{ este fracție supraunitară.}$$

19. Folosind ca numitori și numărători oricare două dintre numerele 3, 5, 6 și 9, scrieți toate fracțiile:
a) subunitare; b) supraunitare.

20. Subliniați fracțiile subunitare:

$$\frac{3}{5}, \frac{4}{4}, \frac{8}{18}, \frac{23}{21}, \frac{6}{4}, \frac{8}{10}, \frac{3}{13}, \frac{50}{25}, \frac{16}{32}, \frac{8}{40}, \frac{47}{47}, \frac{302}{120}, \frac{a}{5a}.$$

21. Câte numere naturale n există astfel încât fracția $\frac{17}{2n+3}$ să fie supraunitară?

22. Dați exemplu de o fracție echiunitară care să aibă la numărător cubul unui număr natural, iar la numitor pătratul unui număr natural.

23. Determinați numerele naturale nenule a și b astfel încât $\frac{a+b}{6}$ să fie echiunitară.

24. Determinați numerele naturale a și b pentru care fracția $\frac{2a+3b}{12}$ este:

$$a) \text{ echiunitară; } b) \text{ subunitară.}$$

25. Determinați numerele naturale a și b , nu ambele nule, astfel încât fracția

$\frac{35}{2a+7b}$ să fie echiunitară, iar suma $a+b$ să fie minimă.

Rezolvare. Frația $\frac{35}{2a+7b}$ este echiunitară dacă $2a+7b=35$. Atunci b este număr impar (dacă b ar fi par, suma $2a+7b$ ar fi și ea număr par, deci nu poate fi egală cu 35).

- dacă $b=1 \Rightarrow 2a+7=35 \Rightarrow a=14 \Rightarrow a+b=15$;
- dacă $b=3 \Rightarrow 2a+21=35 \Rightarrow a=7 \Rightarrow a+b=10$;
- dacă $b=5 \Rightarrow 2a+35=35 \Rightarrow a=0 \Rightarrow a+b=5$;
- dacă $b>5$ atunci fracția nu mai este echiunitară.

Numerele cerute sunt $a=0$ și $b=5$.

26. Determinați numerele naturale a și b , nu ambele nule, astfel încât fracția $\frac{53}{4a+3b}$ să fie echiunitară și suma $a+b$ să fie maximă.



27. a) Determinați numerele naturale a, b, c astfel încât fracția $\frac{4}{a^2+b^2+c^2}$ să fie supraunitară.

b) Determinați numerele naturale a, b, c , astfel încât fracția $\frac{5}{a^2+b^2+c^2}$ să fie echiunitară.

c) Determinați numerele naturale a și b pentru care fracția $\frac{9}{a^2+b^2+4}$ este echiunitară.

Rezolvare. a) Frația dată este supraunitară dacă $4 > a^2+b^2+c^2$. Numerele a, b, c pot fi cel mult egale cu 1, dar nu pot fi toate egale cu 0. Cazurile se pot organiza în tabelul:

a	b	c	Discuție
1	1	1	toate sunt egale cu 1
1	1	0	două dintre numerele a, b, c sunt egale cu 1 și al treilea este egal cu 0
1	0	1	
0	1	1	două dintre numerele a, b, c sunt egale cu 0 și al treilea este egal cu 1
1	0	0	
0	1	0	
0	0	1	

28. a) Determinați fracțiile subunitare de forma $\frac{x6}{3y}$ știind că număratorul $\overline{x6}$ este pătrat perfect, iar numitorul $\overline{3y}$ este număr prim.

b) Determinați fracțiile supraunitare de forma $\frac{6x}{y7}$, știind că număratorul $\overline{6x}$ este pătrat perfect, iar numitorul $\overline{y7}$ este număr prim.

Rezolvare. a) Frația $\frac{x6}{3y}$ este subunitară dacă $\overline{x6} < \overline{3y}$, de unde $x=1$ sau $x=2$. Pentru $x=1$, rezultă $\overline{x6} = 16 = 4^2$, iar pentru $x=2$, numărul $\overline{x6} = 26$ nu este pătrat perfect. Numerele prime de forma $\overline{3y}$ sunt 31 și 37. Frațiile căutate sunt $\frac{16}{31}$ și $\frac{16}{37}$.

29. Andrei scrie pe tablă toate fracțiile de forma $\frac{a}{8}$, cu proprietatea că $a|8$.

Bianca scrie toate fracțiile de forma $\frac{8}{b}$, cu proprietatea că $b|8$. Corina scrie toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, unde $a|4$ și $b|6$.

Determinați fracțiile echiunitare, fracțiile subunitare și fracțiile supraunitare scrise de fiecare dintre cei trei copii.

30. Fie șirul de fracții ordinare:

$$\frac{1}{2017}, \frac{2}{2016}, \frac{3}{2015}, \frac{4}{2014}, \dots, \frac{2015}{3}, \frac{2016}{2}, \frac{2017}{1}.$$

Scrieți fracțiile echiunitare, fracțiile subunitare și fracțiile supraunitare din acest șir.

Probleme de șapte stele

31. a) Știind că fracția $\frac{ab5+12}{2ab+123}$ este echiunitară, determinați $a+b$.

b) Știind că fracția $\frac{ab5+12}{2ab+123}$ este subunitară, determinați valoarea maximă a sumei $a+b$.

32. Arătați că fracția $\frac{2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{2010}}{(32^{1608})^{251}}$ este supraunitară.

33. Fie secvența de fracții $\frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{1}{2}; \frac{3}{1}; \frac{2}{2}; \frac{1}{3}; \frac{4}{1}; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{20}{24}$.

a) Determinați numărul termenilor secvenței date.

b) Determinați numărul fracțiilor subunitare din secvența dată.

c) Determinați numărul fracțiilor supraunitare din secvența dată.